**Descrição da Solução**

A solução passa por fazer um multi-grafo não-dirigido, em que cada vértice representa uma linha de metro, e cada aresta representa uma ligação entre duas linhas. Isto é, caso duas linhas tenham pelo menos uma estação em comum, então estas estarão ligadas no nosso grafo. Deste modo, o nosso grafo terá L vértices e E arestas, em que o E representa o número de ligações entre linhas. Após a construção deste grafo, percorremos o mesmo com uma BFS L vezes, que nos retornará o número máximo de mudanças de linhas que alguém fará para ir de uma estação para outra, já que a distância entre dois vértices no nosso grafo corresponde ao número de mudanças de linha necessárias para ir de uma estação na primeira linha para uma estação na segunda linha.

**Análise Teórica**

* **Leitura dos dados de entrada e processamento dos dados:** simples leitura do input, com ciclos a depender de M (número de ligações da rede de metro), em que se cria a linha Z, caso ainda não tenha sido criada, e adiciona-se as estações X e Y ao set de estações que estão inseridas na linha, com complexidade O(). Caso a linha Z já tenha sido criada, obtém-se o ponteiro para a mesma, percorrendo uma lista com todas as linhas até encontrarmos a pretendida e adiciona-se as estações X e Y ao set de estações que estão inseridas na linha. Logo, O().
* **Construção do grafo:** verifica quais linhas têm estações em comum, através de um loop a depender quadraticamente de L, em que percorre a lista de estações que pertencem à lista X e verifica se pertence também à Y. Caso pertença, adiciona a estação Y ao vetor de estações ligadas da linha X e vice-versa. Logo, O().
* **Aplicação do algoritmo indicado para calcular o valor pedido:** utilização do algoritmo BFS para percorrer o grafo através de um loop a depender de L. Este grafo tem L vértices e E arestas, em que o E corresponde ao número de ligações entre linhas, pelo que será igual a , já que cada linha pode estar conectada a L-1 linhas. Logo, O().
* **Complexidade global da solução:** deste modo, a solução tem uma complexidade global de O(), redutível a O()).

**Avaliação Experimental dos Resultados**

Tendo em conta que o main() terá complexidade O(), para verificar este resultado, gerou-se testes em que se aumentava o tamanho de N em 10000 instâncias de 10000 até 30000, para M e L constantes. Além disso, aumentava-se o M em 300000 instâncias deste 300000 até 900000 para N e L constantes. Por fim, aumentava-se o L em 300 instâncias deste 300 até 900 para M e N constantes. Deste modo, gerou-se 27 testes para comprovar a complexidade teórica calculada.

Assim, construiu-se um gráfico com a complexidade teórica dos dados no eixo XX e com o tempo correspondente para cada N, M e L no eixo YY. No entanto, ao analisar o gráfico 1, não se verifica uma relação de linearidade entre a complexidade e os tempos obtidos, pelo que se conclui que a complexidade efetiva do programa seja O(). Neste último, ao construir-se o gráfico 2, já se observa uma relação de linearidade.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | M | L | Tempo | Compl.Teórica | Compl.Efetiva |
| 10000 | 300000 | 300 | 1,16 | 3691200000 | 102000000 |
| 10000 | 600000 | 300 | 3,173 | 3782400000 | 115806180 |
| 10000 | 900000 | 300 | 6,063 | 3873600000 | 130294091,3 |
| 20000 | 300000 | 300 | 1,064 | 7833144301 | 192000000 |
| 20000 | 600000 | 300 | 2,62 | 7924434610 | 204000000 |
| 20000 | 900000 | 300 | 4,663 | 8015724919 | 205806180 |
| 30000 | 300000 | 300 | 1,028 | 12179570524 | 220294091,3 |
| 30000 | 600000 | 300 | 2,414 | 12270913660 | 231612359,9 |
| 30000 | 900000 | 300 | 4,105 | 12362256797 | 260588182,6 |
| 10000 | 300000 | 600 | 1,85 | 14581200000 | 282000000 |
| 10000 | 600000 | 600 | 4,601 | 14762400000 | 295806180 |
| 10000 | 900000 | 600 | 8,545 | 14943600000 | 306000000 |
| 20000 | 300000 | 600 | 1,818 | 31148706278 | 310294091,3 |
| 20000 | 600000 | 600 | 4,289 | 31329996587 | 347418539,9 |
| 20000 | 900000 | 600 | 7,165 | 31511286896 | 384000000 |
| 10000 | 300000 | 900 | 2,455 | 32671200000 | 390882273,9 |
| 10000 | 600000 | 900 | 5,981 | 32942400000 | 411612359,9 |
| 10000 | 900000 | 900 | 10,778 | 33213600000 | 440588182,6 |
| 30000 | 300000 | 600 | 1,839 | 48534252687 | 564000000 |
| 30000 | 600000 | 600 | 4,097 | 48715595824 | 576000000 |
| 30000 | 900000 | 600 | 6,734 | 48896938960 | 591612359,9 |
| 20000 | 300000 | 900 | 2,594 | 69947976239 | 617418539,9 |
| 20000 | 600000 | 900 | 5,86 | 70219266548 | 620588182,6 |
| 20000 | 900000 | 900 | 9,489 | 70490556857 | 660882273,9 |
| 30000 | 300000 | 900 | 2,68 | 1,09065E+11 | 846000000 |
| 30000 | 600000 | 900 | 6,085 | 1,09337E+11 | 887418539,9 |
| 30000 | 900000 | 900 | 9,639 | 1,09608E+11 | 930882273,9 |

\*Testes corridos num Macbook M1 Pro com 16GB de RAM